Лекция 14 Двойные интегралы.

Тлеулесова А.М.

1) Определение двойного интеграла как предела сумм Римана.

2) Основные свойства двойного интеграла.

3) Вычисление двойного интеграла.

4) Замена переменных в двойном интеграле

Определение двойного интеграла.

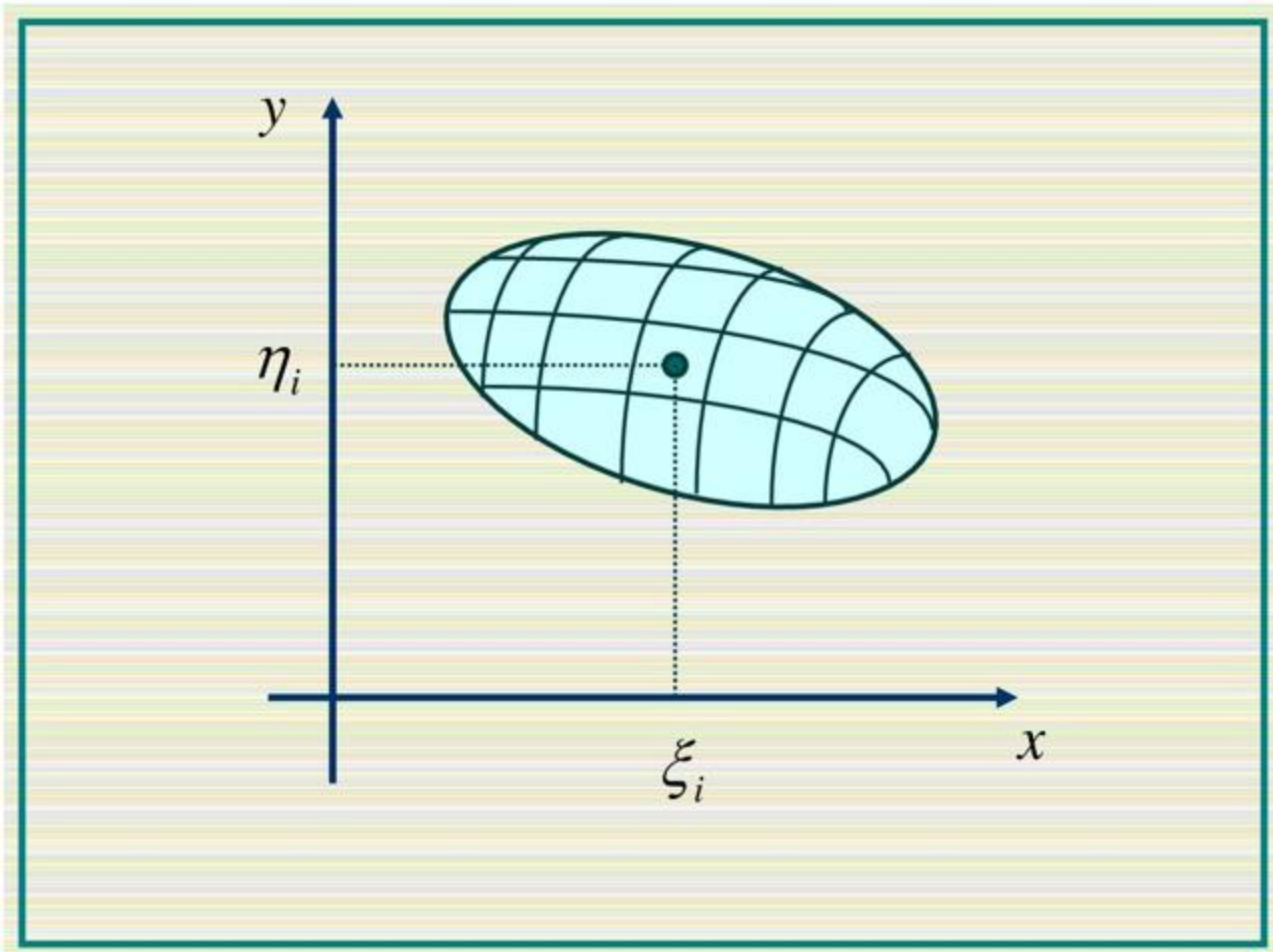
- Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в области D. Разобьём область D произвольным образом на связные части D_i, $i = \overline{1,n}$. В каждой из частей выберем произвольным образом точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$, $M_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$. Пусть σ_i - площадь подобласти D_i, $\lambda = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i, i = \overline{1,n}$. После чего составим

интегральную сумму:

$$\boxed{I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \sigma_i} \quad (*)$$

Если существует конечный предел интегральных сумм (*) при $\lambda \to 0 \quad (n \to \infty)$, который не зависит от способа разбиения области $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$ и от выбора точек $M_i \in D_i$, то он называется

двойным интегралом функции по области D и



y
η_i
x
ξ_i

Существование двойного интеграла

Функция, $z = f(x,y)$ для которой двойной интеграл существует, называется интегрируемой в области D.

и обозначается:

$$I \equiv \lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} I_n = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

Пусть граница Г области $\overline{D}$ является кусочно-гладкой линией, т.е. её можно представить в виде конечного числа гладких участков кривых, т.е. линий, имеющих касательную в каждой своей точке.

Теорема 1: Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то для неё существует двойной интеграл.

Существование двойного интеграла

и обозначается:

Функция, $z = f(x,y)$

для которой

двойной интеграл

$$I \equiv \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} I_n = \iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

существует, называется интегрируемой в области D.

Пусть граница Г области $\overline{D}$ является кусочно-гладкой линией, т.е. её можно представить в виде конечного числа гладких участков кривых, т.е. линий, имеющих касательную в каждой своей точке.

Теорема 1: Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области, то для неё существует двойной интеграл.

Свойства двойного интеграла

1. Если функции: $f(x,y)$, $g(x,y)$ - интегрируемы в области $\overline{D}$ то их сумма: $f(x,y) \pm g(x,y)$ также интегрируема в этой области и верно равенство:

$$\iint\limits_D \left(f(x,y) \pm g(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_D \left(f(x,y)\right) dxdy \pm \iint\limits_D \left(g(x,y)\right) dxdy$$

2. Если функция $z = f(x,y)$ интегрируема в области $\overline{D}$, то функция $z = k \cdot f(x,y)$ - также интегрируема в этой области $(k = const)$ и

$$\iint\limits_D k \cdot f(x,y) dxdy = k \cdot \iint\limits_D f(x,y) dxdy$$

3. Если функция $z = f(x,y)$ непрерывна в области $\overline{D}$ и $\overline{D} = \overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \ldots \cup \overline{D_n}$

$$\iint\limits_D f(x,y) dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y) dxdy$$

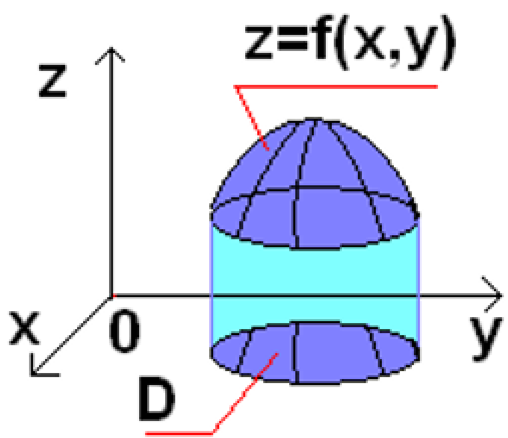
Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x,y) \geq 0, \quad \forall (x,y) \in D$ **и для неё существует двойной интеграл:** $I \equiv \lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ n \to \infty}} I_n = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

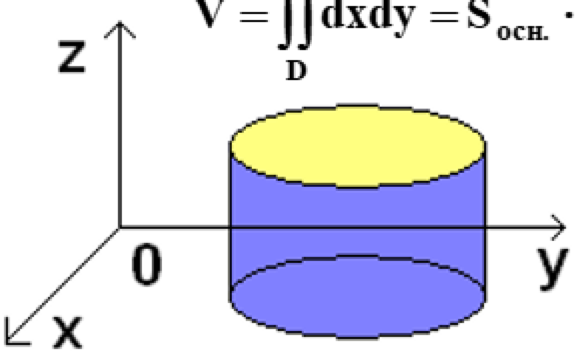
тогда:

$$\boxed{V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy}$$

где V- объём цилиндрического тела, у которого основанием служит проекция поверхности $z = f(x,y)$ **на плоскость хОу, тело ограничено сверху поверхностью** $z = f(x,y)$.



$$V = \iint\limits_D dxdy = S_{осн.} \cdot h = S_{осн.} \cdot 1$$



Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

- Вычисление двойного интеграла сводится к повторному интегрированию. Пусть областью изменения независимых переменных является: $\bar{D} = \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

  это криволинейная трапеция

  на плоскости xOy ($y = y_1(x),\ \ y = y_2(x)$ - гладкие линии). Тогда:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$

При этом область интегрирования должна быть правильной в направлении оси Oy. Интеграл по переменной «y» называется внутренним, а по переменной «x»- внешним.

Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

- Сначала вычисляется внутренний интеграл и в результате получаем некоторую функцию $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy = \varphi(x)$ затем интегрируя её по другой переменной «x», получаем результат: $\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ при этом последний интеграл называется внешним.
- **Замечание 1:** Пределы интегрирования будут постоянными в обоих интегралах, если область интегрирования есть квадрат или прямоугольник со сторонами параллельными осям координат (в д.с.к.).
- **Замечание 2:** Если область интегрирования есть правильная область в направлении оси Ox, то

$$\overline{D} = \begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

Вычисление двойного интеграла в д.с.к.

- Тогда соответствующий двойной интеграл:

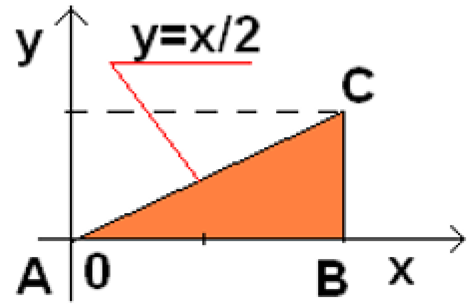
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

- **Замечание 3:** Если область интегрирования $\overline{D}$ не является правильной ни в одном из координатных направлений, то её представляют в виде суммы конечного числа областей, каждая из которых правильная по одному из направлений Ox либо Oy, затем используя свойства двойного интеграла, производят непосредственно вычисления.

Пример 1:

- **Вычислить значение двойного интеграла:** $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$ **в области** $D:\Delta ABC \quad A(0,0),\ B(2,0),\ C(2,1)$

Данная область является правильной в обоих направлениях. Поэтому:



$$\iint\limits_D x^2 y\cdot dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{y=0}^{y=x/2} x^2 y\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 x^2\left(\frac{x^2}{8}-0\right)dx=\frac{1}{8}\int\limits_0^2 x^4 dx=\frac{4}{5}$$

или:

$$\iint\limits_D x^2 y\cdot dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{x=2y}^{x=2} x^2 y\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)_{x=2y}^{x=2}\cdot y\,dy=\int\limits_0^1\left(\frac{8}{3}y-\frac{8}{3}y^4\right)dy=\frac{8}{3}\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right)_0^1=\frac{4}{5}$$

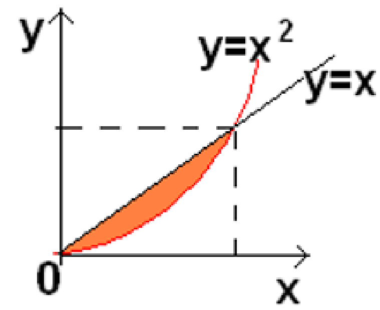
Пример 2:

- Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$

. Изобразим область интегрирования:

$$\overline{D} = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$



$$\int_0^1 dy \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} f(x,y)dx$$

Замечание 4: Пределы интегрирования необходимо расставлять так, чтобы процесс вычисления был наименее трудоёмким.